网络首发时间：2025-01-07 10:48:12　网络首发地址：https://link.cnki.net/urlid/23.1390.U.20250107.1027.004

哈 尔 滨 工 程 大 学 学 报
Journal of Harbin Engineering University

机器人铣削力致误差建模及加工姿态优化方法

钱琛，姚建均，张宜坤

（哈尔滨工程大学 机电工程学院，黑龙江 哈尔滨 150001）

摘　要：为了对铣削机器人末端姿态进行规划以提高加工质量，本文针对机器人铣削时的力致误差，提出了一种同时优化刀具朝向和冗余自由度的轨迹规划方法。建立了考虑主轴重力和铣削力的力致误差指标，提出了一种主轴重力和重心的辨识方法和基于神经网络的铣削力预测方法。以力致误差和平滑度指标为优化目标，建立了铣削机器人多目标姿态优化模型。将非支配排序方法和差分进化算法相结合，提出了多目标姿态优化方法，对刀具朝向和冗余自由度寻优。实验结果表明：所提出的力致误差模型和姿态优化方法能够有效提高机器人在执行加工任务时的刚度和加工质量，降低了实验路径 41.3% 的加工误差，可以为工程应用提供有效借鉴。

关键词：机器人铣削；力致误差；平滑度；主轴重力；神经网络；铣削力预测；刀具朝向优化；冗余自由度优化

Doi：10.11990/jheu.202405009

中图分类号：TP2　　　**文献标识码：**A

The force-induced error modeling and tool pose optimization of robot milling

QIAN Chen，YAO Jianjun，ZHANG Yikun

(College of Mechanical and Electrical Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

Abstract: In order to optimize milling robot posture to improve the machining quality, this paper proposes a trajectory planning method that simultaneously optimizes tool orientation and redundancy to address force-induced errors during robotic milling. The force-induced error index considering the spindle gravity and milling force is established, along with methods for spindle gravity and center-of-mass identification and a neural network-based milling force prediction approach. The multi-objective posture optimization model of the milling robot is established with the force-induced error and smoothness index as the optimization objectives. The multi-objective optimization method is proposed by combining the non-dominated sorting method and differential evolution algorithm to optimize tool orientation and redundancy. Experimental results demonstrate that the proposed posture optimization method based on the force-induced error model effectively enhances the stiffness and machining quality of the robot during processing tasks. This approach reduces machining errors along the experimental path by 41.3%, providing valuable insights for engineering applications.

Keywords：Robotic Milling; Force-induced error; Smoothness; Spindle gravity; Neural network; Milling force prediction; Tool orientation optimization; Redundancy optimization

随着机器人的发展，其越来越多的被应用于执行机械加工任务，如焊接、打磨、搬运、铣削等。当六自由度工业机器人被用于铣削加工时，存在一个功能性冗余自由度。冗余自由度的存在增加了机器人在执行任务时的灵巧性和可操纵性，也提供了通过优化机器人姿态提高加工质量的机会。机器人的串联结构，导致其加工效率和质量与机器人加工姿态有很大关系。在进行加工时，力的方向和切削力的大小也会随着机器人姿态的变化而变化。

为了提高加工精度，减少由于机器人刚度不足造成的末端形变，Lin 等[1]对铣削力进行了预测，并利用机器人刚度模型估计刀尖变形误差，提出了轮廓误差期望值与标准差相结合的性能指标来评价加工质量。Zhao 等[2]提出了一种形变指标直接反映机器人末端受力的形变，然后根据基于该指标的刚度性能地图优化机器人加工姿态和工件布局。上述研究在计算机器人末端形变时只考虑了末端所受到铣削力。在实际加工过程中，机器人末端除了受到铣削力之外，还受到主轴重力的作用。主轴重

收稿日期：2024-05-07.
基金项目：黑龙江省自然科学基金项目（E2018019）；中央高校基本科研业务费项目（3072020CF0704）.
作者简介：钱琛，男，博士研究生；
姚建均，男，教授，博士生导师.
通信作者：姚建均，E-mail: travisyao@126.com.

力在末端所受合力中占有不小的比重，在计算中必须考虑，否则会导致计算的形变指标有较大误差。铣削路径通常由很多个刀位点组成，在进行铣削力预测时，若采用传统的铣削力计算方法如几何解析法[3, 4]和有限元仿真方法[5]，将导致较大的计算量，加重运算负担[6, 7]。因此，有必要提出一种运算量小、运算速度快的铣削力预测方法。

除了由低刚度引起的末端形变造成的误差外，关节平滑度是影响加工质量的另一个重要因素。较好的关节平滑度可以减少关节频繁加减速带来的颤振，提高加工效率和表面加工质量。Lu 等[8]利用 B 样条曲线对工业机器人关节轨迹进行插补，并以 B 样条曲线的一阶导数、二阶导数和三阶导数的平方和作为关节轨迹的平滑度指标，对工业机器人的平滑度进行了优化。Peng 等[9]利用牛顿插值公式对关节加速度进行估计，以各关节加速度的平方和作为优化指标，生成了平滑的关节轨迹。Lu 等[10]以机器人关节运动微分向量的 2 范数作为优化目标，提出了平滑轨迹的生成算法。

为了解决机器人运动规划问题，基于不同的机器人加工性能指标，一些学者提出了不同的解决方案。Alexandre 等[11]基于迪杰斯特拉算法提出了 graph-based 运动规划方法，用图空间中的节点表示离散的冗余自由度，采用迪杰斯特拉算法搜索最短路径。Peng 等[9]利用 graph-based 方法对冗余自由度进行离散搜索，随后采用序列线性化方法对得到的冗余解进行修正。基于迪杰斯特拉的运动规划方法能够找到全局最优解，但其属于遍历搜索算法，计算负担重。不少学者采用启发式优化算法解决冗余度优化问题，如 WOA[12]、NSGA-II 和 DE[13]、NSGA[14]、PSO[15, 16]，但大量的刀位点数目会导致启发式优化算法具有很高的维度，难以求解。此外，传统的机器人五轴球头铣削路径通常是采用由商用加工仿真软件生成的，在对刀具朝向进行规划时并不考虑机器人特有的构型特点及铣削力变化[10]，不具有针对性。因此，将刀具朝向与冗余度一起规划能够进一步提高机器人铣削的加工质量。

本文针对铣削机器人运动规划问题，开展了加工姿态优化研究。在考虑主轴重力的情况下建立了机器人力致误差模型，基于神经网络对铣削力进行预测。以力致误差和轨迹平滑度为优化对象，提出了一种多目标的刀具姿态优化方法，从而提高机器人铣削加工的质量。

1　铣削机器人运动学模型

球头铣刀在执行铣削任务时，由于其刀头形状为球体，刀具朝向在一定范围内的变化不影响铣削任务的执行。刀具朝向角和冗余度如图 1 所示。其中，$\{CL_i\}$表示在刀具路径上第 i 个刀位点对应的切触坐标系，其原点在刀位点处，z 轴沿加工表面法向，x 轴沿刀具路径方向，y 轴由右手定则确定。首先令刀具坐标系与切触坐标系重合，令其绕 z 轴旋转，旋转角度为冗余角 r，随后令刀具坐标系绕切触坐标系的 y 轴旋转，旋转角度为前倾角 l，最后令当前刀具坐标系绕切触坐标系的 x 轴旋转，旋转角度为侧倾角 t。则刀具坐标系到切触坐标系的齐次变换矩阵为：

$$\boldsymbol{T}_{TCP}^{CL} = trot(x,t)\cdot trot(y,l)\cdot trot(z,r) \tag{1}$$

式中：$trot(x,t)$ 表示绕坐标轴 x 旋转角度 t 的齐次变换矩阵函数。

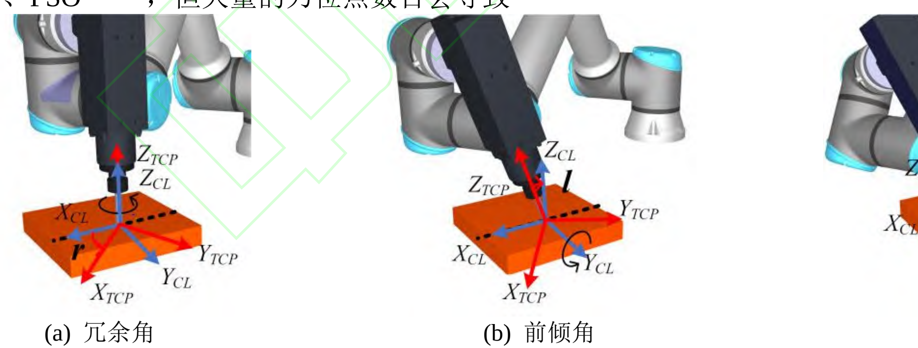


图 1　切触坐标系到刀具坐标系的转换

Fig. 1 The transformation of the engagement coordinate system to the tool coordinate system

令 $\boldsymbol{T}_{CL}^{W}$ 表示工件坐标系到切触坐标系的齐次变换矩阵，刀具路径通常可以表示为时间的函数 $[x(n), y(n), z(n)]^{\mathrm{T}}$，在 n 时刻刀具路径的切向量为 $\boldsymbol{T}(n)=[\dot{x}(n), \dot{y}(n), \dot{z}(n)]^{\mathrm{T}}$，则在工件坐标系$\{W\}$中，切触坐标系$\{CL\}$的 x 轴单位法向量可以计算为：

$$\boldsymbol{x}_{CL}^{W}(n) = \boldsymbol{T}(n)/|\boldsymbol{T}(n)| \tag{2}$$

令工件平面单位法向量在工件坐标系中表示为 $\boldsymbol{z}_{CL}^{W}$，则工件坐标系$\{W\}$中，切触坐标系$\{CL\}$的 y 轴向量可以计算为：

$$\boldsymbol{y}_{CL}^{W} = \boldsymbol{x}_{CL}^{W}\times\boldsymbol{z}_{CL}^{W}/\left|\boldsymbol{x}_{CL}^{W}\times\boldsymbol{z}_{CL}^{W}\right| \tag{3}$$

则 $\boldsymbol{T}_{CL}^{W}$ 可以计算为：

$$\boldsymbol{T}_{CL}^{W} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{CL}^{W} & \boldsymbol{y}_{CL}^{W} & \boldsymbol{z}_{CL}^{W} & \begin{matrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{matrix} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

那么基座标系$\{B\}$到刀具坐标系$\{TCP\}$的齐次变换矩阵为：

$$\boldsymbol{T}_{6}^{B} = \boldsymbol{T}_{W}^{B}\cdot\boldsymbol{T}_{CL}^{W}\cdot\boldsymbol{T}_{TCP}^{CL}\cdot(\boldsymbol{T}_{TCP}^{6})^{-1} \tag{5}$$

式中：$\boldsymbol{T}_W^B$ 为基座坐标系到工件坐标系的齐次变换矩阵，由工件的安装位置决定。机器人逆解可以计算为：

$$\boldsymbol{q}(t,l,r)=ik(\boldsymbol{T}_6^B) \tag{6}$$

式中 $ik(\cdot)$ 为机器人的逆运动学函数。

2 铣削机器人力致误差模型

本研究采用机器人末端的力致误差作为加工刚度的评价指标。目前，大多数力致误差模型只考虑了机器人在加工过程中所受的铣削力而忽略了主轴重力。然而，在实际加工中如果忽略主轴重力，会使计算得到的末端受力在数值和方向上出现较大的误差，令本就不高的机器人加工精度雪上加霜。为了得到更加准确的力致误差模型，更好的评价加工精度，在本节中建立了同时考虑主轴重力和铣削力的力致误差模型。

2.1 机器人关节刚度

机器人刚度主要来源于驱动系统和传动系统，由于连杆刚度远大于关节刚度，负载引起的连杆变形可忽略不计。在实际应用中，通常将机器人每个关节都建模为扭簧[17]，扭簧系数等同于机器人各关节刚度值，机器人的关节刚度矩阵可以表达为 $\boldsymbol{K}_\theta=diag([K_{\theta_1},K_{\theta_2},K_{\theta_3},K_{\theta_4},K_{\theta_5},K_{\theta_6}])$。机器人末端受力形变可以计算为：

$$\Delta\boldsymbol{X}=\boldsymbol{J}\boldsymbol{K}_\theta^{-1}\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F} \tag{7}$$

式中：$\boldsymbol{F}=[\boldsymbol{f};\boldsymbol{m}]$，$\boldsymbol{f}$、$\boldsymbol{m}$ 分别为主轴所受的力和力矩。

2.2 主轴重量引起的形变

主轴重力是机器人末端受力的组成之一，为了计算主轴重量施加到机械臂末端的力和扭矩，需要对主轴的重力和重心位置进行辨识。图 2 所示的铣削系统被用来辨识主轴重力和重心位置，将六维力传感器安装在主轴末端，设重心在传感器坐标系中位置为 ${}^S\boldsymbol{P}_G=[x_G,y_G,z_G]^{\mathrm{T}}$，重力大小为 G。



图 2 用于主轴重力辨识的实验系统

Fig. 2 Experimental system for spindle gravity identification

考虑到六维力传感器存在零点漂移现象，安装主轴后，传感器的读数可以被表示为：

$${}^S\boldsymbol{F}_S={}^S\boldsymbol{F}_G+\boldsymbol{F}_0 \tag{8}$$

$${}^S\boldsymbol{N}_S={}^S\boldsymbol{P}_G\times{}^S\boldsymbol{F}_G+\boldsymbol{N}_0 \tag{9}$$

式中：$\boldsymbol{F}_0$ 和 $\boldsymbol{N}_0$ 分别为传感器力和力矩的零点漂移误差，${}^S\boldsymbol{F}_G$ 为主轴重力在传感器坐标系下的表示，机器人水平安装，${}^B\boldsymbol{F}_G=[0,0,-G]^{\mathrm{T}}$，${}^S\boldsymbol{F}_G=\boldsymbol{R}_B^S\cdot{}^B\boldsymbol{F}_G$，则式(8)可以写为：

$${}^S\boldsymbol{F}_S=\left[\boldsymbol{z}_B^S \mid \boldsymbol{E}_{3\times3}\right]\cdot\begin{bmatrix}-G\\ \boldsymbol{F}_0\end{bmatrix} \tag{10}$$

式中：${}^S\boldsymbol{z}_B$ 为 $\boldsymbol{R}_B^S$ 的第 3 列。测量在不同姿态下传感器的 N 组数据，得到关于式(10)的方程组：

$$\begin{bmatrix}{}^S\boldsymbol{F}_1\\ \vdots\\ {}^S\boldsymbol{F}_N\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}{}^S\boldsymbol{z}_{B,1} & \boldsymbol{E}_{3\times3}\\ \vdots & \boldsymbol{E}_{3\times3}\\ {}^S\boldsymbol{z}_{B,N} & \boldsymbol{E}_{3\times3}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-G\\ \boldsymbol{F}_0\end{bmatrix} \tag{11}$$

采用最小二乘法即可求得-G 和 $\boldsymbol{F}_0$。将式(8)代入式(9)，可以得到：

$${}^S\boldsymbol{N}_S=\left[\boldsymbol{E}_{3\times3} \mid -{}^S\boldsymbol{F}\times\right]\cdot\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}\\ {}^S\boldsymbol{P}_G\end{bmatrix} \tag{12}$$

式中：$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{F}_0\times{}^S\boldsymbol{P}_G+\boldsymbol{N}_0$。${}^S\boldsymbol{F}\times$ 表示由向量 ${}^S\boldsymbol{F}$ 决定的反对称矩阵，其计算式为：

$${}^S\boldsymbol{F}\times=\begin{bmatrix}0 & -{}^S\boldsymbol{F}_z & {}^S\boldsymbol{F}_y\\ {}^S\boldsymbol{F}_z & 0 & -{}^S\boldsymbol{F}_x\\ -{}^S\boldsymbol{F}_y & {}^S\boldsymbol{F}_x & 0\end{bmatrix} \tag{13}$$

$\boldsymbol{K}$ 和 ${}^S\boldsymbol{P}_G$ 同样可以由最小二乘法求解，则六维力传感器的扭矩零点漂移为 $\boldsymbol{N}_0=\boldsymbol{K}-\boldsymbol{F}_0\times{}^S\boldsymbol{P}_G$。那么由主轴重量引起的机械臂末端形变可以计算为：

$$\Delta{}^B\boldsymbol{X}_G={}^B\boldsymbol{J}_G\boldsymbol{K}_\theta^{-1}\,{}^B\boldsymbol{J}_G^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}{}^B\boldsymbol{F}_G\\ \boldsymbol{O}\end{bmatrix} \tag{14}$$

2.3 铣削力引起的力致误差

铣削力是机器人末端受力的另一组成部分。在五轴球头铣削加工中，不同的刀具朝向会导致铣削力的变化。为了提高运算效率，本文不再进行铣削力建模，将实际铣削采集得到的铣削力数据用于训练神经网络，随后使用训练过的神经网络模型对不同刀具朝向下的球头铣削力进行预测。采集在不同刀具朝向下的铣削力数据。假设刀具所受的切削力在 $\{TCP\}$ 中为 ${}^{TCP}\boldsymbol{F}_{TCP}$，则在考虑主轴重力的情况下，加工时传感器读数为：

$${}^S\boldsymbol{F}_S=\boldsymbol{R}_{TCP}^S\cdot{}^{TCP}\boldsymbol{F}_{TCP}+\boldsymbol{R}_B^S\cdot{}^B\boldsymbol{F}_G+\boldsymbol{F}_0 \tag{15}$$

根据式(15)，铣削力可以由传感器读数计算为：

$${}^{TCP}\boldsymbol{F}_{TCP}=\boldsymbol{R}_S^{TCP}\cdot({}^S\boldsymbol{F}_S-\boldsymbol{R}_B^S\cdot{}^B\boldsymbol{F}_G-\boldsymbol{F}_0) \tag{16}$$

通过采集不同刀具朝向进行铣削时的传感器数据，并用式(16)进行处理，可以得到多组铣削力与刀具朝向的映射关系，随后采用该数据对神经网络进行训练。

径向基神经网络是一种前馈性神经网络，利用不同的径向基函数对未知函数进行拟合。相比于其他神经网络，其结构简单、收敛速度快、能逼近任意非线性函数。在隐含层确定后，就可以把非线性问题变成线性问题进行处理，并且能够快速逼近函数。因此本文采用径向基神经网络对铣削力进行训练及预测。其网络结构图如图 3 所示。

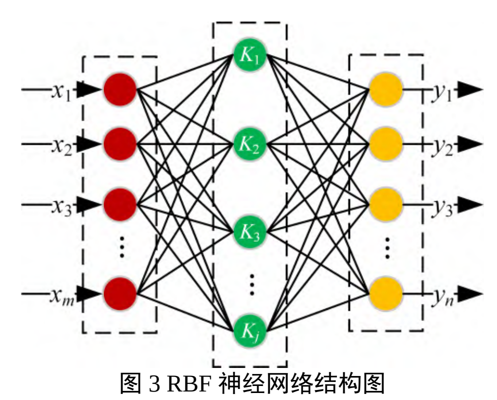


图 3 RBF 神经网络结构图

Fig. 3 RBF neural network structure diagram

在力致误差计算过程中，利用神经网络得到在一定刀具朝向下的铣削力为 ${}^{TCP}\boldsymbol{F}_{TCP}$，则其在基坐标系$\{B\}$中可以表示为：

$$ {}^{B}\boldsymbol{F}_{TCP} = \boldsymbol{R}_{TCP}^{B} \cdot {}^{TCP}\boldsymbol{F}_{TCP} \tag{17}$$

由于刀具转速较高，且接触面积较小，本研究忽略铣削转矩的影响[18]，则：

$$ \Delta\, {}^{B}\boldsymbol{X}_{TCP} = {}^{B}\boldsymbol{J}_{TCP}\boldsymbol{K}_{\theta}^{-1}\, {}^{B}\boldsymbol{J}_{TCP}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} {}^{B}\boldsymbol{F}_{TCP} \\ \boldsymbol{O} \end{bmatrix} \tag{18}$$

式中：${}^{B}\boldsymbol{J}_{TCP}$ 为$\{TCP\}$在基座标系$\{B\}$中的雅可比矩阵。由主轴重力和铣削力引起的刀尖中心点的形变可以计算为：

$$ \Delta^{B}\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_{3\times3} & -\boldsymbol{r}({}^{B}\boldsymbol{P}_{G,TCP}) \\ \boldsymbol{O}_{3\times3} & \boldsymbol{E}_{3\times3} \end{bmatrix} \cdot \Delta^{B}\boldsymbol{X}_{G} + \Delta^{B}\boldsymbol{X}_{TCP} \tag{19}$$

在本研究中，将刀具沿工件加工表面法向的变形量定义为力致误差指标，即：

$$ f_{error} = [0 \quad 0 \quad 1] \cdot \boldsymbol{R}_{B}^{CL} \cdot [\boldsymbol{E}_{3\times3} \quad \boldsymbol{O}_{3\times3}] \cdot \Delta^{B}\boldsymbol{X} \tag{20}$$

3 加工姿态优化模型及方法

3.1 姿态优化模型

铣削机器人姿态优化的目的，是通过优化加工姿态的方式，提高加工质量。影响机器人加工质量的 2 个主要因素为刚度和关节运动平滑度。此外，铣削任务必须在机器人加工、机器人结构、机器人运动学、和加工环境的约束下执行，如碰撞、关节极限和刀具朝向约束等。

3.1.1 轨迹平滑度指标

为了保证在机器人执行加工任务时各关节运动轨迹平滑，提出了一种基于关节速度的平滑度指标，其计算式为：

$$ f_{smooth} = \sum_{i=1}^{6} [\dot{\boldsymbol{q}}(i)]^{2} \tag{21}$$

式中：$\dot{\boldsymbol{q}}(i)$ 为第 i 个关节角速度，可以由雅可比矩阵计算，计算式为：

$$ \dot{\boldsymbol{q}} = {}^{B}\boldsymbol{J}_{TCP}^{-1} \cdot {}^{B}\dot{\boldsymbol{X}}_{TCP} \tag{22}$$

式中：${}^{B}\dot{\boldsymbol{X}}_{TCP}$ 为机械臂末端相在基坐标系中的速度，可以表示为：

$$ {}^{B}\dot{\boldsymbol{X}}_{TCP} = \begin{bmatrix} {}^{B}\boldsymbol{v}_{TCP} \\ {}^{B}\boldsymbol{\omega}_{TCP} \end{bmatrix} \tag{23}$$

旋转刚体的角速度可以用欧拉角速率表示为 $\dot{\boldsymbol{\Theta}}_{\mathrm{Euler}} = [\dot{t} \quad \dot{l} \quad \dot{r}]^{\mathrm{T}}$，还可以由角速度矢量表示为 $\boldsymbol{\omega} = [\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^{\mathrm{T}}$。

根据旋转矩阵与角速度矢量之间的关系[19]，角速度矢量可以由欧拉角速率计算为 $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{J}_{\omega}\dot{\boldsymbol{\Theta}}_{\mathrm{Euler}}$，其中：

$$ \boldsymbol{J}_{\omega} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sin(l) \\ 0 & \cos(t) & -\cos(l)\sin(t) \\ 0 & \sin(t) & \cos(l)\cos(t) \end{bmatrix} \tag{24}$$

刀具坐标系$\{TCP\}$在基座标系$\{B\}$下的角速度为 ${}^{B}\boldsymbol{\omega}_{TCP} = \boldsymbol{R}_{CL}^{B} \cdot {}^{CL}\boldsymbol{\omega}_{TCP}$，在$\{CL\}$中的线速度速度可以表示为 ${}^{CL}\boldsymbol{v}_{TCP} = [f \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}}$，其中 f 为进给速度。那么$\{TCP\}$在$\{B\}$中速度的计算式为：

$$ {}^{B}\boldsymbol{v}_{TCP} = {}^{B}\boldsymbol{v}_{CL} + \boldsymbol{R}_{CL}^{B} \cdot {}^{CL}\boldsymbol{v}_{TCP} + {}^{B}\boldsymbol{\omega}_{TCP} \times {}^{B}\boldsymbol{r}_{CL,TCP} \tag{25}$$

式中：${}^{B}\boldsymbol{v}_{CL}$ 为$\{CL\}$在$\{B\}$中的速度，由于工件与机器人基座没有相对运动，因此 ${}^{B}\boldsymbol{v}_{CL} = \boldsymbol{O}$；${}^{B}\boldsymbol{r}_{CL,TCP}$ 为从$\{CL\}$原点到$\{TCP\}$原点的向量在$\{B\}$中的表达，而$\{CL\}$和$\{TCP\}$原点重合，因此 ${}^{B}\boldsymbol{r}_{CL,TCP} = \boldsymbol{O}$，则 ${}^{B}\boldsymbol{v}_{TCP} = \boldsymbol{R}_{CL}^{B} \cdot {}^{CL}\boldsymbol{v}_{TCP}$。

末端执行器在基座标系$\{B\}$中的速度可以由下式计算：

$$ \begin{bmatrix} {}^{B}\boldsymbol{v}_{6} \\ {}^{B}\boldsymbol{\omega}_{6} \end{bmatrix} = {}^{B}\boldsymbol{J}_{6} \cdot \dot{\boldsymbol{q}} \tag{26}$$

式中：${}^{B}\boldsymbol{J}_{6}$ 为机器人末端执行器在基座标系中的雅可比矩阵。而$\{TCP\}$在基座标系中的速度可以通过下式得到：

$$ \begin{cases} {}^{B}\boldsymbol{\omega}_{TCP} = {}^{B}\boldsymbol{\omega}_{6} \\ {}^{B}\boldsymbol{v}_{TCP} = {}^{B}\boldsymbol{v}_{6} + {}^{B}\boldsymbol{\omega}_{6} \times {}^{B}\boldsymbol{r}_{6,TCP} \end{cases} \tag{27}$$

式中：${}^{B}\boldsymbol{r}_{6,TCP}$ 为从$\{6\}$原点到$\{TCP\}$原点的向量在$\{B\}$中的表达，${}^{B}\boldsymbol{r}_{6,TCP} = \boldsymbol{R}_{6}^{B} \cdot {}^{6}\boldsymbol{P}_{torg}$，结合式(26)和式(27)可以得到$\{TCP\}$在$\{B\}$中的雅可比矩阵为：

$$ {}^{B}\boldsymbol{J}_{TCP} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & -{}^{B}\boldsymbol{r}_{6,TCP}\times \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \cdot {}^{B}\boldsymbol{J}_{6} \tag{28}$$

用同样的方法可以得到重心的雅可比矩阵为：

$$ {}^{B}\boldsymbol{J}_{G} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & -{}^{B}\boldsymbol{r}_{6,G}\times \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \cdot {}^{B}\boldsymbol{J}_{6} \tag{29}$$

由式(22)、(28)可以计算出各关节角速度值。将式(28)、(29)分别代入式(14)、(18)即可得到由重力和铣削力引起的力致误差。

3.1.2 碰撞约束

在进行轨迹规划时考虑碰撞避免是必需的，由于铣削机器人工作环境通常较为简单，很少有障碍物出现，所以铣削机器人干涉检查的主要目的是防止连杆之间及连杆与主轴的碰撞。本文为了简化运

算，采用包容块干涉分析方法完成碰撞分析，使用简单的圆柱体将连杆和主轴包络，干涉问题可以简化为检查各圆柱体之间的干涉。圆柱体之间的干涉检查模型如图 4 所示。

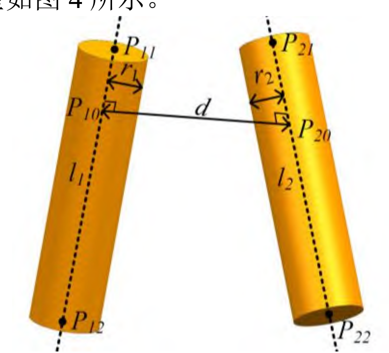


图 4 两圆柱体之间的干涉检查模型

Fig. 4 The check model of interference between two cylinders

两圆柱的轴线方程可以写为：

$$\begin{cases} P_{l_1} = P_{11} + \lambda_1 l_1 \boldsymbol{e_1} \\ P_{l_2} = P_{21} + \lambda_2 l_2 \boldsymbol{e_2} \end{cases} \tag{30}$$

式中：l 为圆柱轴线长度，$\boldsymbol{e}$ 为轴线单位向量，λ 为比例系数。为了求两条轴线之间的最短距离，构建最小值问题为：

$$\min d(\lambda_1,\lambda_2) = \left\| (P_{11} + \lambda_1 l_1 e_1) - (P_{21} + \lambda_2 l_2 e_2) \right\|^2 \tag{31}$$

根据极小值条件求解式(31)的极值点，得到 2 个圆柱体之间的最短距离为：

$$d_{min} = \begin{cases} \|P_{11}P_{21}\| & \lambda_{1,min} < 0, \lambda_{2,min} < 0 \\ \|P_{11}P_{2,min}\| & \lambda_{1,min} < 0, 0 \le \lambda_{2,min} \le 1 \\ \|P_{11}P_{22}\| & \lambda_{1,min} < 0, \lambda_{2,min} > 1 \\ \|P_{1,min}P_{21}\| & 0 \le \lambda_{1,min} \le 1, \lambda_{2,min} < 0 \\ \|P_{1,min}P_{2,min}\| & 0 \le \lambda_{1,min} \le 1, 0 \le \lambda_{2,min} \le 1 \\ \|P_{1,min}P_{22}\| & 0 \le \lambda_{1,min} \le 1, \lambda_{2,min} > 1 \\ \|P_{12}P_{21}\| & \lambda_{1,min} > 1, \lambda_{2,min} < 0 \\ \|P_{12}P_{2,min}\| & \lambda_{1,min} > 1, 0 \le \lambda_{2,min} \le 1 \\ \|P_{12}P_{22}\| & \lambda_{1,min} > 1, \lambda_{2,min} > 1 \end{cases} \tag{32}$$

当 $d_{\min} - (r_1 + r_2) > 0$ 时，两圆柱体不会发生干涉。为了防止圆柱体之间的干涉，可以建立约束函数为：

$$f_{collision} = \min\{d_{\text{cylinder},1}, d_{\text{cylinder},2}, \cdots, d_{\text{cylinder},n}\} \tag{33}$$

式中：$d_{\text{cylinder},1}, d_{\text{cylinder},2}, \cdots, d_{\text{cylinder},n}$ 是两两圆柱体之间的最短距离。需要注意的是，对于一个确定的圆柱体，结构上与其相邻的圆柱体不需要被检测。

3.1.3 其他约束

机器人运行时应该满足关节极限约束，即：

$$\boldsymbol{q}_{down} \le \boldsymbol{q} \le \boldsymbol{q}_{up} \tag{34}$$

式中 $\boldsymbol{q}_{down}$、$\boldsymbol{q}_{up}$ 分别为上下关节极限。

此外，刀具姿态也应该在约束范围内，刀具姿态约束可以写为：

$$\begin{cases} t_{down} \le t \le t_{up} \\ l_{down} \le l \le l_{up} \\ r_{down} \le r \le r_{up} \end{cases} \tag{35}$$

式中 t、l、r 分别为刀具侧倾角、前倾角和冗余角度。

为了使机器人远离奇异点并具有较好的可操纵性，本研究采用可操纵性度量作为奇异性指标，其计算式为：

$$\omega(\boldsymbol{q}) = \sqrt{\det(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{q}))} \tag{36}$$

式中：$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})$ 为机器人雅可比矩阵，$\omega(\boldsymbol{q})$ 越小，机器人离奇异点越近，则奇异性约束可以写为 $\omega(\boldsymbol{q}) > \varepsilon_1$，针对本文使用的机器人利用最优化方法得到 $\omega(\boldsymbol{q})$ 的最大值为 3.75×10^6，这里取奇异性阈值为 $\varepsilon_1 = 1\times10^6$ 。

综上所述，机器人铣削轨迹规划模型可以表示为：

$$\min_{t,l,r} F(t,l,r) = [f_{error}(t,l,r), f_{smooth}(t,l,r)]$$

$$s.t. \begin{cases} f_{collision} > 0 \\ \boldsymbol{q}_{down} \le \boldsymbol{q} \le \boldsymbol{q}_{up} \\ \omega(\boldsymbol{q}) > \varepsilon_1 \\ t_{down} \le t \le t_{up} \\ l_{down} \le l \le l_{up} \\ r_{down} \le r \le r_{up} \end{cases} \tag{37}$$

3.2 姿态优化方法

启发式算法模型简单，求解高效，本文选用其作为刀具姿态优化问题的求解方法，对各刀位点的最优刀具姿态进行逐点迭代求解，最后形成最优刀具姿态序列。由于式(37)中的优化模型为多目标优化问题，因此采用非支配排序方法求解多目标优化模型的帕累托前沿面，并选用帕累托前沿面中点位置的解作为优化模型的最优解。

铣削刀具路径通常由大量离散刀位点组成，离散步长较小，相邻刀位点距离较近，对应的最优刀具姿态也接近。为了利用这一特点，本文选用差分进化算法解决各刀位点姿态优化问题。在进行刀具姿态优化时，将前一刀位点优化得到的最优解集作为下一刀位点优化问题的初始解，这样得到的初始解将出现在最优解附近，能够充分利用差分进化算法的局部寻优能力。基于差分进化算法和非支配排序方法的刀具姿态优化流程如图 5 所示。

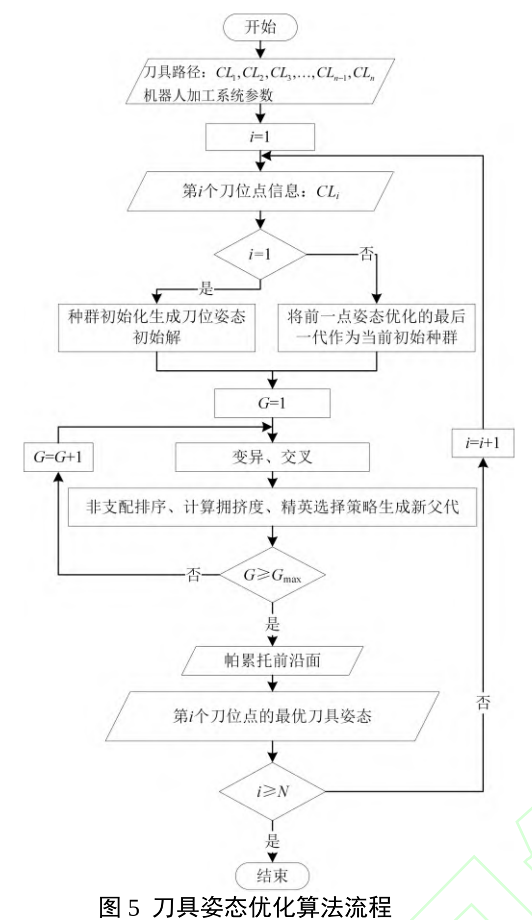


图 5 刀具姿态优化算法流程

Fig. 5 The flow chart of tool pose optimization algorithm

4 实验与分析

为了验证所提出的力致误差模型的精确性和运动规划方法的有效性，以 ANNO 机器人 AN5 建立图 2 所示的铣削机器人实验平台，其改进 D-H 参数见表 1。使用的六维力传感器为坤维 KR75C，能够测量 3 个方向的力和 3 个轴的力矩，分辨率和采集频率分别为 0.03、3000。

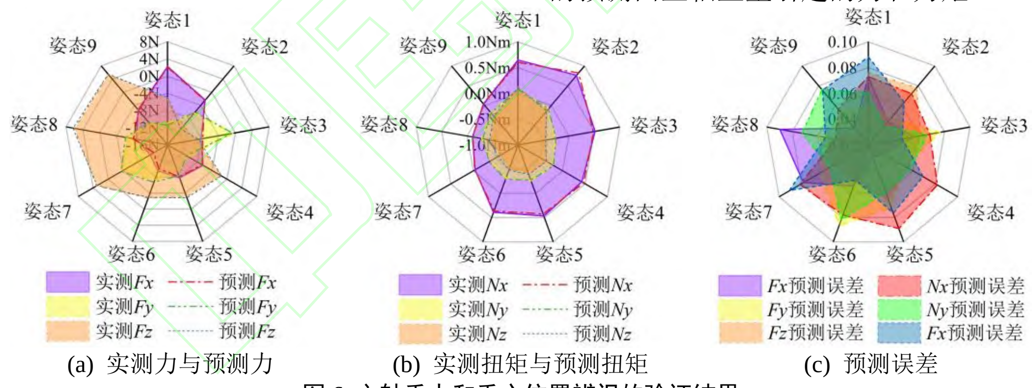
表 1 AN5 改进 D-H 参数

Table 1 The modified D-H parameters of AN5

连杆 i	a_{i-1}/mm	α_{i-1}/rad	d_i/mm	K_i /（N• m/rad）
1	0	0	139	57310
2	0	π/2	114	48260
3	-280	0	0	50430
4	-240	0	-12	18030
5	0	π/2	102	23980
6	0	-π/2	100	16560

4.1 主轴重力辨识及铣削力预测实验

采用第 2 节中提出的重力辨识方法，采集 27 组不同位姿的数据，18 组用于辨识，另外 9 组验证辨识结果。辨识得到的主轴重力和重心的位置分别为 $g = 11.90$ N 、${}^{S}\boldsymbol{P}_{Gorg} = [0, -53.73, 33.29]^{\mathrm{T}}$ mm。验证结果如图 6 所示，可以看出辨识实验能够较准确的预测由主轴重量引起的力和力矩。



(a) 实测力与预测力 (b) 实测扭矩与预测扭矩 (c) 预测误差

图 6 主轴重力和重心位置辨识的验证结果

Fig. 6 Identification results of the spindle gravity and center of gravity position

设置前倾角和侧倾角范围分别为[0°, 20°]、[-20°, 20°]，将二者按一定步长离散，离散步长设置为 2°，共生成 231 组刀具朝向数据。在不同刀具朝向下进行铣削实验，进给速度为 200 mm/min，主轴转速为 3000 r/min，切削深度为 2 mm。铣刀为 10 mm 两刃球头刀，螺旋角 45°。由于力传感器受振动影响，采集信号噪声较大，利用文献[20]中的方法对信号进行处理和滤波，采集数据如图 7 所示，可以看出各轴力变换周期长度为 0.02 s，与主轴转速设置一致。随机选取 200 组切削数据对神经网络进行训练，剩下的 31 组数据用于验证。不同前倾角和侧倾角下的各轴平均铣削力如图 8 所示，其中训练数据各轴的平均相对误差分别为 0.0109、0.0085、0.0111，测试数据集各轴平均相对误差为 0.0119、0.0101、0.0115，说明神经网络对铣削力的预测效果较好。

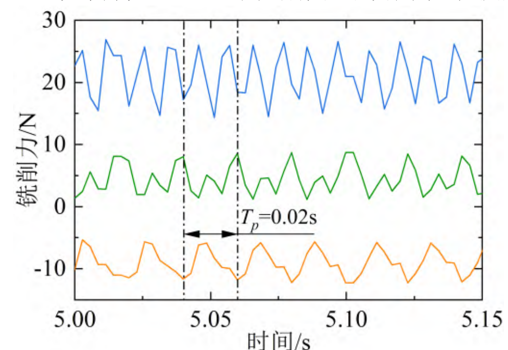


图 7 六维力传感器采集到的力信号

Fig. 7 The force signal collected by the six-dimensional force sensor

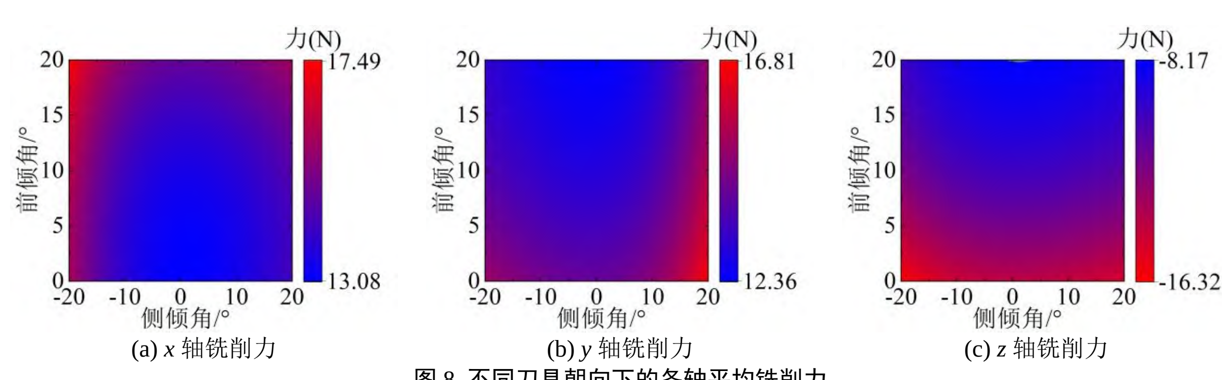


图 8 不同刀具朝向下的各轴平均铣削力

Fig. 8 The mean milling force under different tool orientations

4.2 铣削验证实验

为了验证本文建立的力致误差模型和刀具姿态规划方法的有效性，分别在考虑力致误差和不考虑力致误差的情况下，对图 9 所示的刀具路径进行铣削机器人轨迹规划，该刀具路径为余弦曲线，加工参数与铣削力采集实验保持一致。

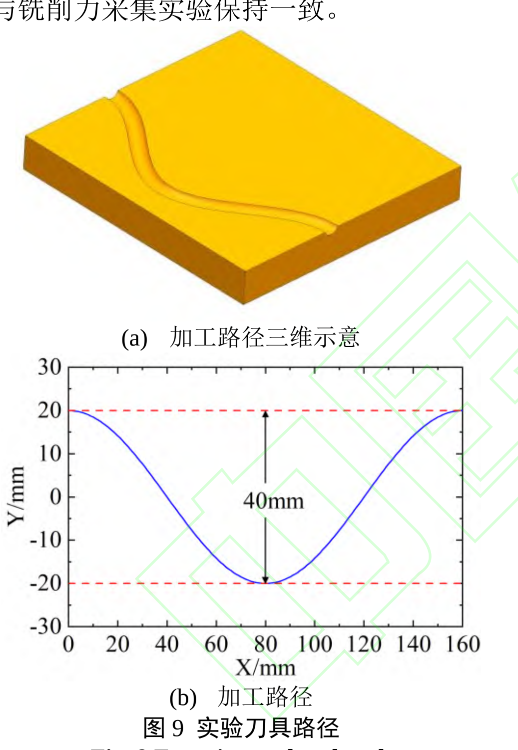


图 9 实验刀具路径

Fig. 9 Experimental tool path

针对图 9 中的加工路径，分别在考虑力致误差和不考虑力致误差的情况下对机器人加工姿态进行优化。2 种情况下优化得到的关节轨迹如图 10(a)、(b)所示，姿态轨迹如图 10(c)、(d)所示。可以看出，不论是否考虑力致误差的情况，使用本文提出的刀具姿态优化方法对刀具姿态进行优化后，均能够得到平滑的关节运动轨迹，证明了本文提出的多目标姿态优化模型和多目标姿态优化方法的有效性。两种情况下优化得到的力致误差指标计算结果如图 11 所示。可以看出，在考虑力致误差的情况下对姿态进行优化，优化模型及方法能够有效降低力致误差指标，但实际加工误差还需要进行铣削加工实验后对工件进行测量才能得到。

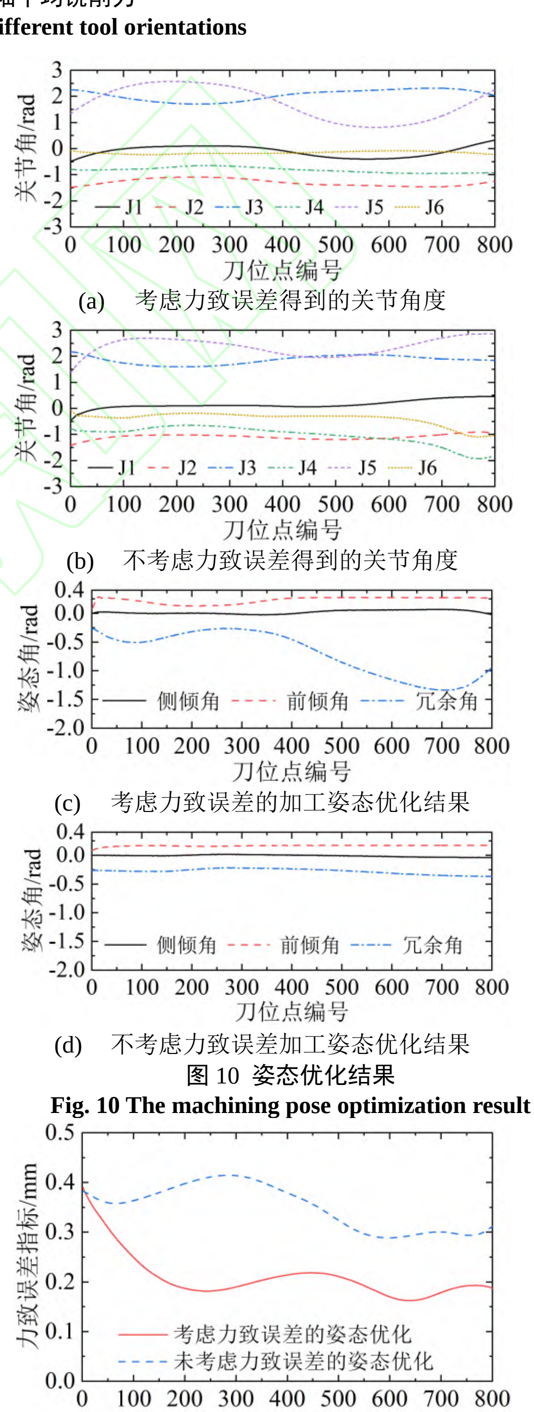


图 10 姿态优化结果

Fig. 10 The machining pose optimization result

图 11 姿态优化结果对应的力致误差指标

Fig. 11 Force-induced error index corresponding to attitude optimization results

基于上述加工轨迹进行加工实验，采集加工中的铣削力数据，将其与本研究中建立的受力模型作比较，结果如图 12 所示。从图 12 中可以看出，在考虑主轴重力时，对末端受力的预测结果与实测信号的数值和趋势较为吻合。而不考虑主轴重力时，机器人末端受力预测结果与实测数据之间的误差较大。为了提高力致误差模型的预测准确性，在进行力致误差建模时，应当把主轴重力考虑在内。

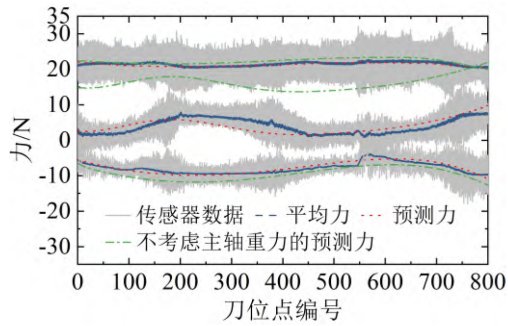


图 12 机器人末端受力实测数据与预测模型的对比

Fig. 12 Comparison of measured data and predicted model of robot EE force

加工路径的铣削结果如图 13 所示。采用 Qu 等[21]提出的测量方法对加工误差进行测量，测量装置如图 14 所示。将数显表探针沿加工路径移动，探针轴线始终垂直于加工表面，便于测量法向加工误差。本文采用的数显表量程为 0~12.7 mm，与计算机采用 232 接口通信，能够将实时测量数据传输至计算机，采样频率为 10 Hz，分辨率为 0.001 mm。数显表分辨率比计算得到的加工误差在数值上低 2 个数量级，能够满足加工误差测量要求。测得的 2 条轨迹的加工误差如图 15 所示。加工误差的统计数据如表 2 所示，在考虑力致误差的情况下，加工误差的平均值、最大值和最小值分别降低了 41.3%、21.4% 和 52.7%，机器人铣削加工误差明显减小，证明了本文所建立的力致误差模型和姿态优化方法的有效性。



图 13 曲线铣削工件结果

Fig. 13 The milled workpiece curve



图 14 工件加工误差测量

Fig. 14 The measurement of workpiece machining error

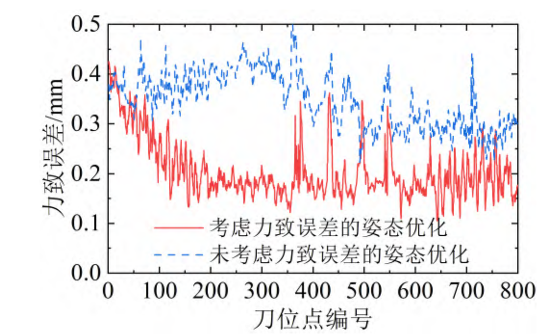


图 15 加工误差测量结果

Fig. 15 The machining error measurement results

表 2 加工误差统计数据

Table 2 Statistical data of machining errors

优化方法	平均误差/mm	最大误差/mm	最小误差/mm
未考虑力致误差优化	0.349	0.542	0.222
考虑力致误差优化	0.205	0.426	0.105
优化效果/%	41.3	21.4	52.7

5 结论

1) 针对机器人在加工过程中低刚度的缺陷，建立了机器人铣削加工力致误差模型。该模型将主轴重力也考虑在内，比传统的机器人加工力致误差模型具有更高的精度。提出了一种基于最小二乘法的主轴重力及重心辨识方法，并采用神经网络对铣削力进行预测，进一步提高了机器人铣削末端受力预测的精度和效率。

2) 面向加工误差和轨迹平滑度，设计了机器人铣削加工姿态优化模型，同时对机器人球头铣削刀具朝向和冗余自由度进行优化。建立了机器人铣削加工力致误差指标和轨迹平滑度指标，将避障、关节极限、奇异性等约束考虑在内，对机器人铣削加工姿态进行优化。

3) 铣削加工实验表明，相比于不考虑力致误差的姿态优化，本文提出的力致误差模型及姿态优化方法将平均加工误差降低了 41.3%，具有一定的工程应用价值。

由于本文采用的姿态优化方法为逐点优化，虽然能够得到较好的优化结果，但不能从路径全局角度对加工姿态进行优化，在未来的研究工作中，应将全局姿态优化作为下一步研究的重点。

参考文献:

[1] LIN Junzhe, YE Congcong, YANG Jixiang, et al. Contour error-based optimization of the end-effector pose of a 6 degree-of-freedom serial robot in milling operation[J]. Robotics and computer-integrated manufacturing, 2022, 73: 102257.

[2] LIN Yang, ZHAO Huan, DING Han. Posture optimization methodology of 6R industrial robots for machining using performance evaluation indexes[J]. Robotics and computer-integrated manufacturing, 2017, 48: 59-72.

[3] OKAFOR A C, ALI SULTAN A. Development of a mechanistic cutting force model for wavy-edge bull-nose helical end-milling of inconel 718 under emulsion cooling strategy[J]. Applied mathematical modelling, 2016, 40(4): 2637-2660.
[4] WOJCIECHOWSKI S, MARUDA R W, NIESLONY P, et al. Investigation on the edge forces in ball end milling of inclined surfaces[J]. International journal of mechanical sciences, 2016, 119: 360-369.
[5] AFAZOV S M, RATCHEV S M, SEGAL J. Modelling and simulation of micro-milling cutting forces[J]. Journal of materials processing technology, 2010, 210(15): 2154-2162.
[6] ARRAZOLA P J, ÖZEL T, UMBRELLO D, et al. Recent advances in modelling of metal machining processes[J]. CIRP annals, 2013, 62(2): 695-718.
[7] MELKOTE S, LIANG S, ÖZEL T, et al. A review of advances in modeling of conventional machining processes: from merchant to the present[J]. Journal of manufacturing science and engineering, 2022, 144(11): 110801.
[8] LU Yaoan, TANG Kai, WANG Chengyong. Collision-free and smooth joint motion planning for six-axis industrial robots by redundancy optimization[J]. Robotics and computer-integrated manufacturing, 2021, 68: 102091.
[9] PENG Jingfu, DING Ye, ZHANG Gang, et al. Smoothness-oriented path optimization for robotic milling processes[J]. Science China technological sciences, 2020, 63(9): 1751-1763.
[10] LU Lei, HAN Jiang, DONG Fangfang, et al. Joint-smooth toolpath planning by optimized differential vector for robot surface machining considering the tool orientation constraints[J]. IEEE/ASME transactions on mechatronics, 2022, 27(4): 2301-2311.
[11] DOLGUI A, PASHKEVICH A. Manipulator motion planning for high-speed robotic laser cutting[J]. International journal of production research, 2009, 47(20): 5691-5715.
[12] WANG Ting, XIN Zhijie, MIAO Hongbin, et al. Optimal trajectory planning of grinding robot based on improved whale optimization algorithm[J]. Mathematical problems in engineering, 2020, 2020: 3424313.
[13] YAO Jianjun, QIAN Chen, ZHANG Yikun, et al. Multi-objective redundancy optimization of continuous-point robot milling path in shipbuilding[J]. Computer modeling in engineering & sciences, 2023, 134(2): 1283-1303.
[14] WIEDMEYER W, ALTOÉ P, AUBERLE J, et al. A real-time-capable closed-form multi-objective redundancy resolution scheme for seven-DoF serial manipulators[J]. IEEE robotics and automation letters, 2021, 6(2): 431-438.
[15] YEASMIN S, SHILL P C, PAUL A K. A new method for smooth trajectory planning for 3R robot arm using enhanced particle swarm optimization algorithm[C]//2017 3rd International Conference on Electrical Information and Communication Technology (EICT). Piscataway, NJ: IEEE, 2017: 1-6.
[16] DOAN N C N, TAO P Y, LIN Wei. Optimal redundancy resolution for robotic arc welding using modified particle swarm optimization[C]//2016 IEEE International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM). Piscataway, NJ: IEEE, 2016: 554-559.
[17] ZHU Zerun, TANG Xiaowei, CHEN Chen, et al. High precision and efficiency robotic milling of complex parts: challenges, approaches and trends[J]. Chinese journal of aeronautics, 2022, 35(2): 22-46.
[18] ZARGARBASHI S H H, KHAN W, ANGELES J. Posture optimization in robot-assisted machining operations[J]. Mechanism and machine theory, 2012, 51: 74-86.
[19] CRAIG J J. Introduction to Robotics: Mechanics and Control [M]. 3th ed. New York: Pearson Education, 2005.
[20] MUN C H, REZVANI S, LEE J, et al. Indirect measurement of cutting forces during robotic milling using multiple sensors and a machine learning-based system identifier[J]. Journal of manufacturing processes, 2023, 85: 963-976.
[21] QU Xiang, WAN Min, SHEN Chuanjing, et al. Profile error-oriented optimization of the feed direction and posture of the end-effector in robotic free-form milling[J]. Robotics and computer-integrated manufacturing, 2023, 83: 102580.